Общая физика
Лекция 4 Закон сохранения момента импульса. Движение в центральном поле.

Трушин Олег Станиславович

Зав. лаб. ЯФ ФТИАН РАН,

Доц. каф. нанотехнологии в электронике ЯрГУ

План лекции

- Закон сохранения момента импульса
- Природа законов сохранения
- Условия равновесия твердого тела
- Движение в центральном поле
- Секториальная скорость
- Интегрирование уравнений движения
- Траектория движения в центральном поле
- Задача двух тел

Закон сохранения момента импульса I

$$\vec{r}_i \times \Big| \qquad m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{k=1}^{N-1} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\,внешн}$$

умножим и просуммируем

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^{N-1} \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,внешн}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right] = \left[\vec{v}_i \times \vec{v}_i\right] + \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i\right] = \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i\right]$$

Закон сохранения момента импульса II

1) $$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i\right)$$

2) $$\sum_i \sum_{k \neq i} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}\right] = \sum_{\substack{\text{по парам} \\ k \neq i}} \left(\left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}\right]\right) = \sum_{\substack{\text{по парам} \\ k \neq i}} \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_k\right) \times \vec{F}_{ik}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{M}_i\right) = \sum_i \vec{N}_i^{\,внешн}$$

$$\vec{M}_i \equiv \left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right]$$ Момент импульса частицы

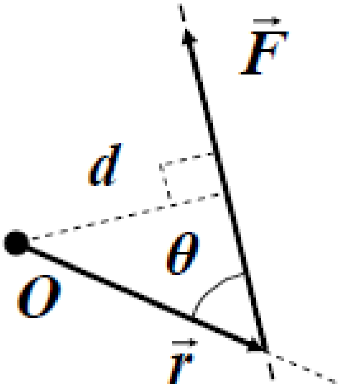
$$\vec{N}_i \equiv \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,внешн}\right]$$ Момент внешних сил

Момент импульса

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Момент силы

$$\vec{N} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$



$$d = r \cdot \sin\theta$$

Плечо силы

Закон сохранения момента импульса III

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{M}_i\right) = \sum_i \vec{N}_i^{\,внешн}$$

Изменение суммарного момента импульса происходит за счет внешних моментов сил !!!

Если сумма внешних моментов сил равна нулю то полный момент сил есть величина постоянная

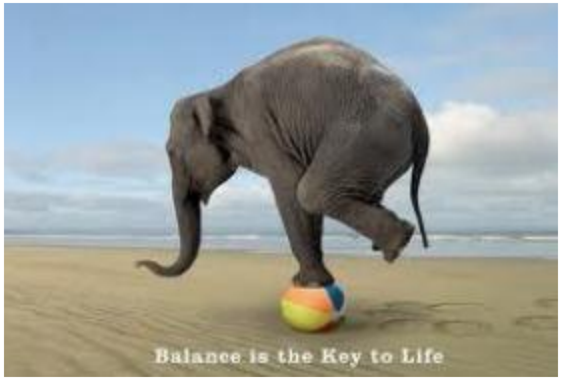
$$\sum_i \vec{N}_i^{\,внешн} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \vec{M}_i = const$$

Природа законов сохранения

- Закон сохранения импульса – однородность пространства
- Закон сохранения момента импульса – изотропия пространства
- Закон сохранения энергии – однородность времени

- Законы сохранения более общие, чем законы Ньютона !!!

Условия равновесия твердого тела



Тело будет оставаться в покое*, если:

1. Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,внешн} = 0$$

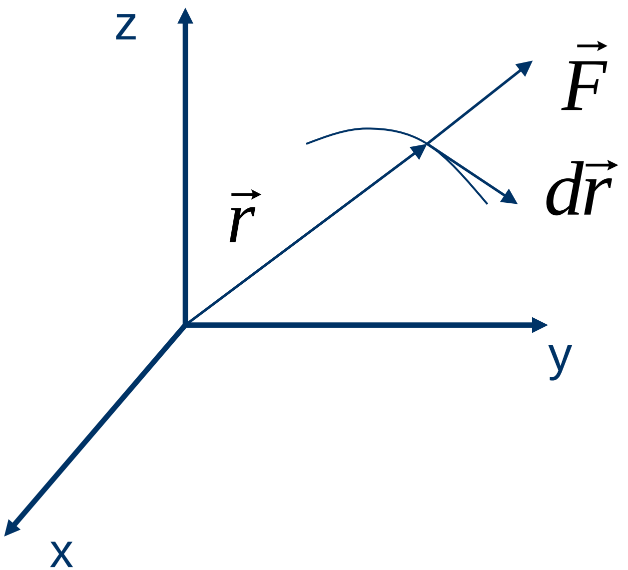
2. Суммарный момент сил относительно любой точки равен нулю:

$$\sum_i \vec{N}_i^{\,внешн} = 0$$

*Примечания: а) центр масс может двигаться прямолинейно и равномерно; б) тело может равномерно вращаться.

Движение в центральном поле I

Сила, действующая на материальную точку, называется **центральной**, если она зависит только от расстояния до силового центра и направлена вдоль прямой, соединяющей точку и силовой центр.



Примеры: сила гравитационного притяжения двух точечных тел, сила кулоновского взаимодействия между двумя покоящимися точечными зарядами в вакууме.

Движение в центральном поле II

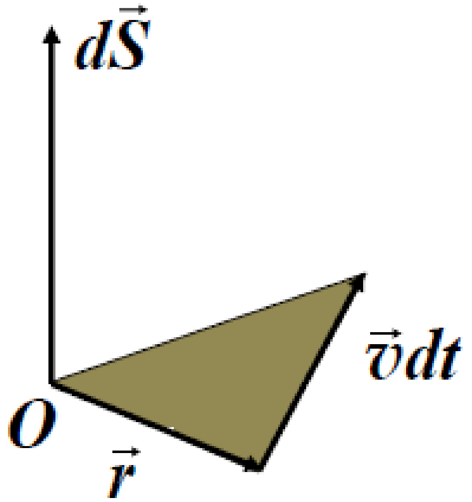
$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{e}_r \qquad \vec{N} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = 0$$

Момент центральной силы относительно силового центра равен нулю (равно нулю плечо этой силы).

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = const$$

Секториальная скорость и момент импульса

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times \vec{v} \cdot dt\right]$$

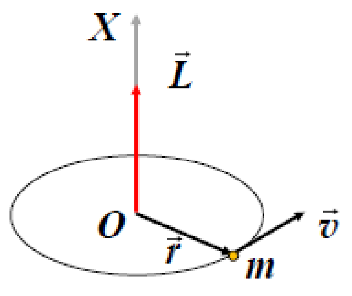


$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = \frac{1}{2m}\left[\vec{r} \times m\vec{v}\right] = \frac{\vec{M}}{2m}$$

Если $\vec{M} = const$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{S}}{dt} = const$

Следствия сохранения момента импульса

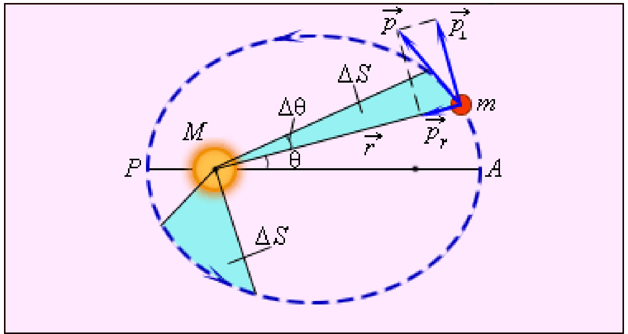
1) **Плоская траектория для которой :**



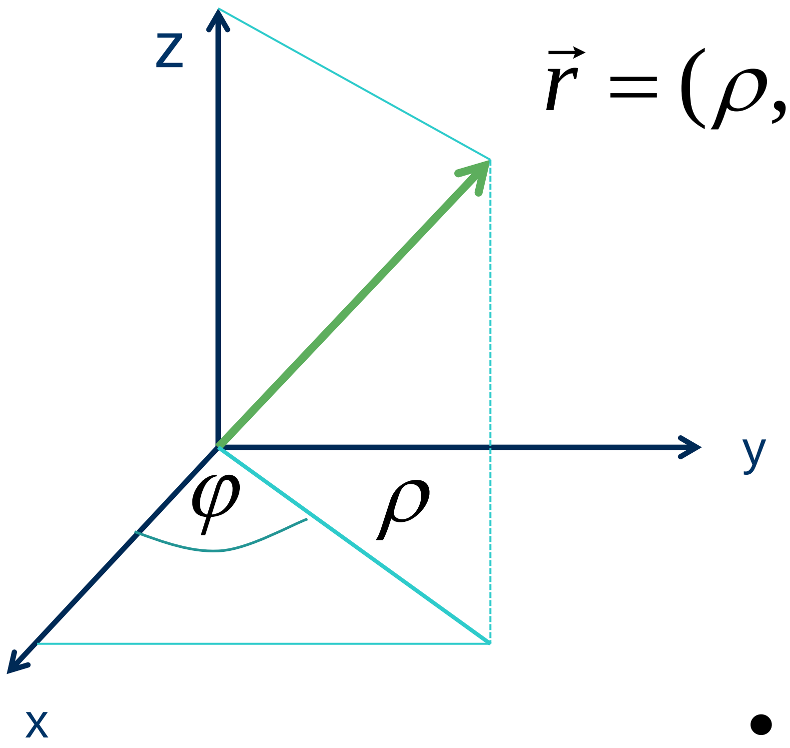
$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = const$$

2) **Постоянство секториальной скорости:**

за равные промежутки времени радиус вектор заметает равные площади



Полярные координаты. Скорость и радиус вектор



$$\vec{r} = (\rho, \varphi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\varphi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

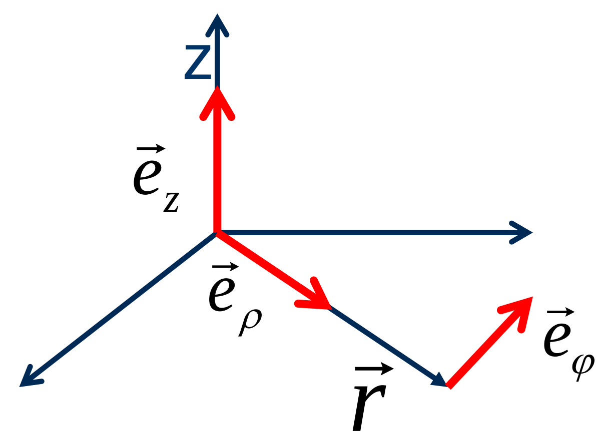
$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

Момент импульса в полярных координатах

Выбираем ось Z направленной вдоль $\vec{M}$

Тогда траектория лежит в плоскости XOY и движения по Z нет $\dot{z} = 0$

скорость $\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_{\rho} + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_{\varphi}$



Момент импульса

$$\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = m\left[\left(\rho \cdot \vec{e}_{\rho}\right) \times \left(\dot{\rho} \cdot \vec{e}_{\rho} + \rho \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_{\varphi} \right) \right] = m\rho^2 \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$$

Кинетическая энергия в полярных координатах

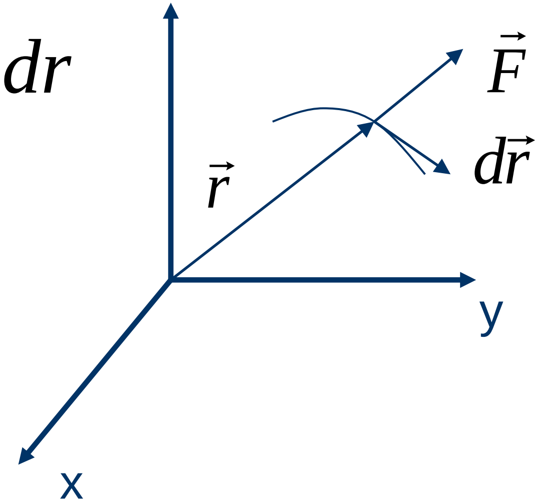
$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}\cdot\vec{e}_{\rho} + \rho\,\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_{\varphi}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^{2} + \rho^{2}\,\dot{\varphi}^{2}\right)$$

Работа центральных сил. Потенциальная энергия.

$$\vec{F} = F(r)\cdot\vec{e}_r$$

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(F(r)\vec{e}_r\right)\cdot\left(dr\cdot\vec{e}_r + rd\varphi\cdot\vec{e}_\varphi\right) = F(r)\cdot dr$$

$$\delta A = F(r)\cdot dr = -dU \qquad U = -\int F(r)dr$$



Особый случай:
(взаимодействие зарядов в электростатике, тяготение)

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

$$U = -\int \frac{\alpha}{r^2}dr = \frac{\alpha}{r} + C$$

$$U(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{U(r) = \frac{\alpha}{r}}$$

Интегрирование уравнения движения I

Полная механическая энергия частицы в центральном поле

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho} = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho}$$

$$\begin{cases} m\rho^2\dot{\varphi} = M_z = const \\ \dfrac{m\dot{\rho}^2}{2} + \dfrac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} + \dfrac{\alpha}{\rho} = E = const \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений совместно получим зависимости от времени

$$\rho(t), \varphi(t)$$

Интегрирование уравнения движения II

подставляя $\dot{\varphi} = \dfrac{M}{m\rho^2}$ из первого уравнения во второе, получим:

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2}{2}\left(\frac{M}{m\rho^2}\right)^2 + \frac{\alpha}{\rho} = E$$

отсюда:

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{\rho} - \frac{M^2}{2m\rho^2}\right)}$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка . Решаем методом разделения переменных.

$$\boxed{\int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{\rho} - \frac{M^2}{2m\rho^2}\right)}} = t + C}$$

Траектория движения тела в центральном поле I

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{M^2}{2m\rho^2}\right)} \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{M}{m\rho^2} \end{cases}$$

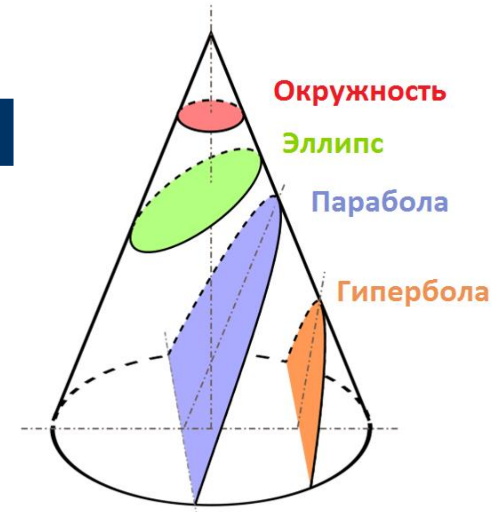
Поделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dfrac{M}{m\rho^2}}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{M^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

Отсюда уравнение траектории

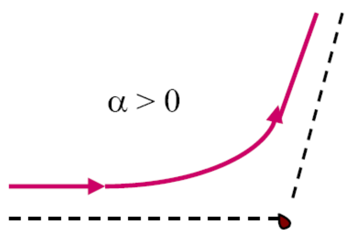
$$\boxed{\varphi = \int \frac{\dfrac{M}{m\rho^2}\,d\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - \dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{M^2}{2m\rho^2}\right)}} + C} \qquad (1)$$

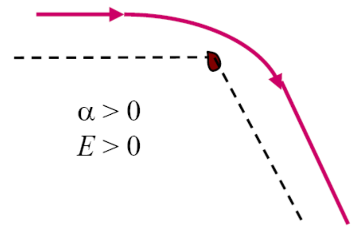
Траектория движения тела в центральном поле II



Уравнения (1) описывают так называемые «конические сечения»

α>0 - отталкивание – ГИПЕРБОЛА

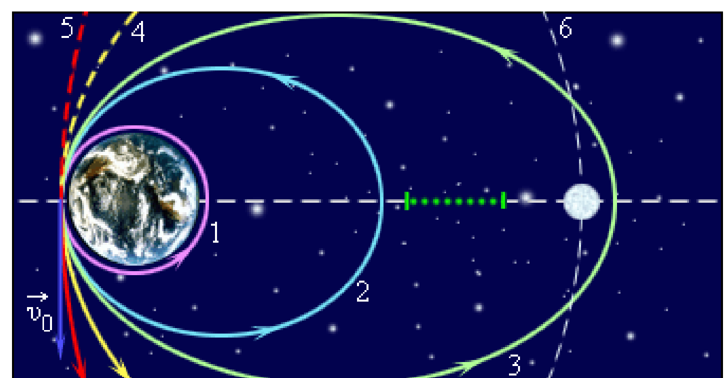




α<0 – притяжение а)E>0 – ГИПЕРБОЛА

б) E=0 – ПАРАБОЛА

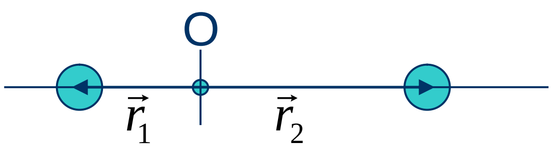
в) E<0 - ЭЛЛИПС



Задача двух тел I

Задача о движении двух взаимодействующих друг с другом тел:

Система замкнута!!!



Центр масс движется прямолинейно и равномерно

Для упрощения описания перейдем в систему Ц.М.

Ставим начало координат в Ц.М.

$$r_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Вводим новую переменную

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\begin{cases} m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases}$$

Решаем совместно

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \end{cases}$$

Задача двух тел II

По 3 закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f(r)\cdot\vec{e}_r$

Тогда уравнения Ньютона примут вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} = f(r)\cdot\vec{e}_r \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -f(r)\cdot\vec{e}_r \end{cases}$$

отсюда

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\cdot f(r)\cdot\vec{e}_r$$

или $\boxed{\mu\cdot\ddot{\vec{r}} = -f(r)\cdot\vec{e}_r}$ где $\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ Приведенная масса

Таким образом, задача двух тел сводится к задаче движения 1 тела в центральном поле !!!