Общая физика
Лекция 3 Работа и Энергия. Законы сохранения.

Трушин Олег Станиславович

Зав. лаб. ЯФ ФТИАН РАН,

Доц. каф. нанотехнологии в электронике ЯрГУ

План лекции

- Кинетическая энергия
- Работа силы. Мощность

Кинетическая энергия

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ Умножим на микроперемещение => $m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{s} = \vec{F}\cdot d\vec{s}$

но $d\vec{s} = \vec{v}\cdot dt$

$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\cdot dt = \vec{F}\cdot d\vec{s}$ или $\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right)\cdot dt = \vec{F}\cdot d\vec{s}$

Если $\vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$ то $K = \frac{mv^2}{2} = const$ Кинетическая энергия

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{s}$$ Работа силы

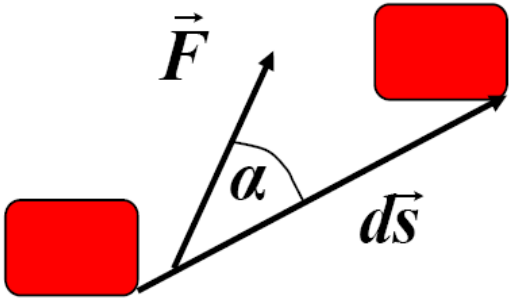
Работа результирующей всех сил действующих на тело идет на приращение кинетической энергии системы

Работа силы. Мощность.

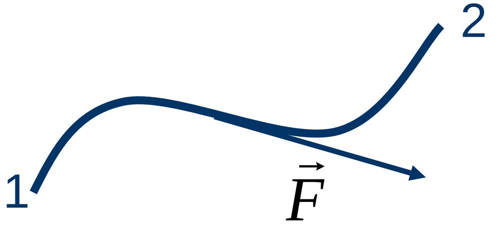
Элементарная работа силы на малом перемещении определяется выражением

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\alpha$$

$$\begin{cases}\cos\alpha > 0 & \delta A > 0\\ \cos\alpha < 0 & \delta A < 0\\ \cos\alpha = 0 & \delta A = 0\end{cases}$$



Работа силы вдоль кривой ,соединяющей точки 1 и 2



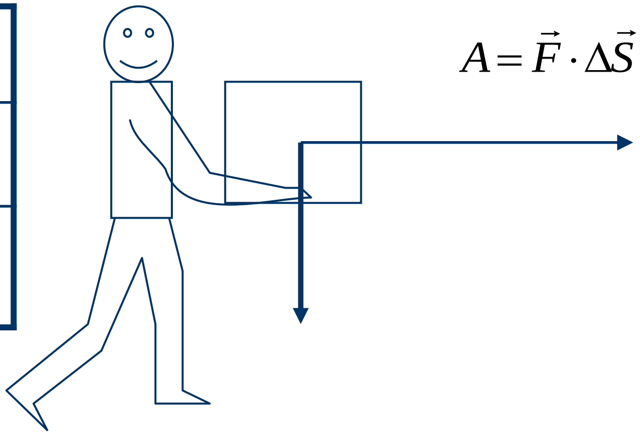
$$A_{1-2} = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_1^2 F_s\cdot ds$$

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

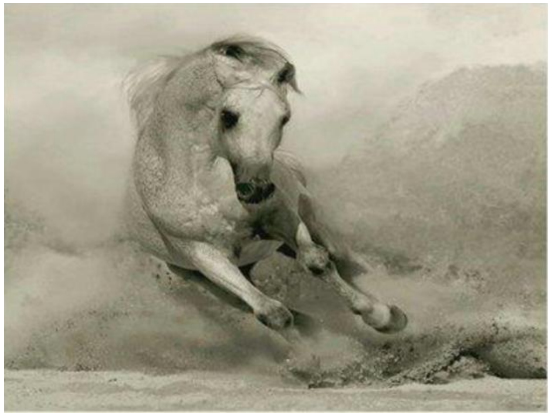
Мгновенная мощность

Работа и ее измерение

	Си	СГС
Работа	1 дж=1н*1м	1эрг=1дин*1см
Мощность	1 Вт=1дж/1сек	1эрг/сек



$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} = 0$$



1 лошадиная сила = 735.5 Ватта

Потенциальное поле. Консервативные силы

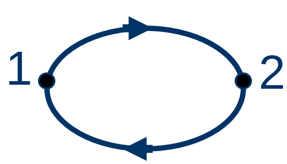
$$\vec{F} = \vec{\nabla}\Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = d\Pi$$

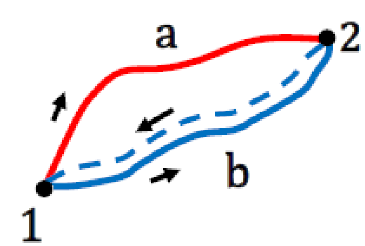
Элементарная работа в потенциальном поле является полным дифференциалом, т.есть не зависит от формы пути

Силы работа которых не зависит от формы пути - **консервативные**

Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю.

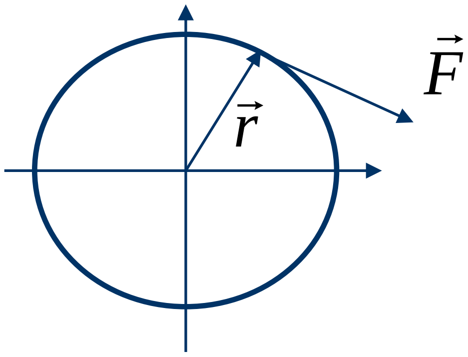


$$\oint dA = 0$$



Пример 1: неконсервативные силы

$$\vec{F} = a \cdot r \cdot \vec{\tau}$$



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} ay & -ax & 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi r} F \cdot dl = ar \cdot 2\pi r = 2\pi a \cdot r^2 \neq 0$$

Пример 2: Работа сил трения

$\vec{F}_{mp}$

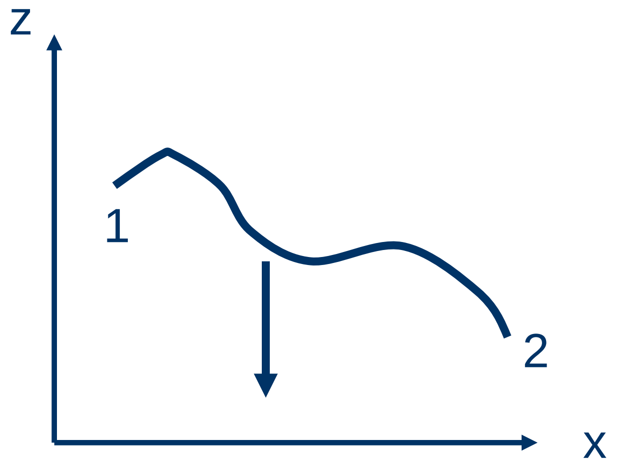
$\vec{v}$

$$\delta A = \vec{F}_{mp} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{mp} \cdot \vec{v} \cdot dt < 0$$

Для сил трения всегда $\delta A < 0$

$$\oint \delta A \neq 0$$

Пример 3: Работа сил тяжести

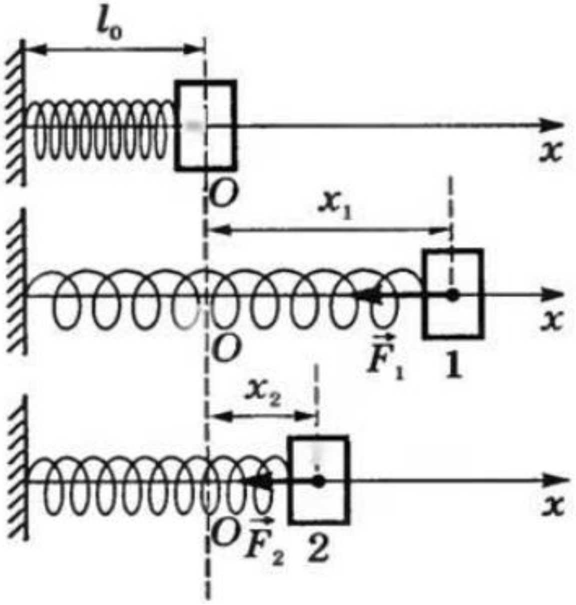


$$\vec{F} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -mg \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix}$$

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(-mg \cdot dz\right) = mg\left(z_1 - z_2\right)$$

Пример 4: Работа сил упругости



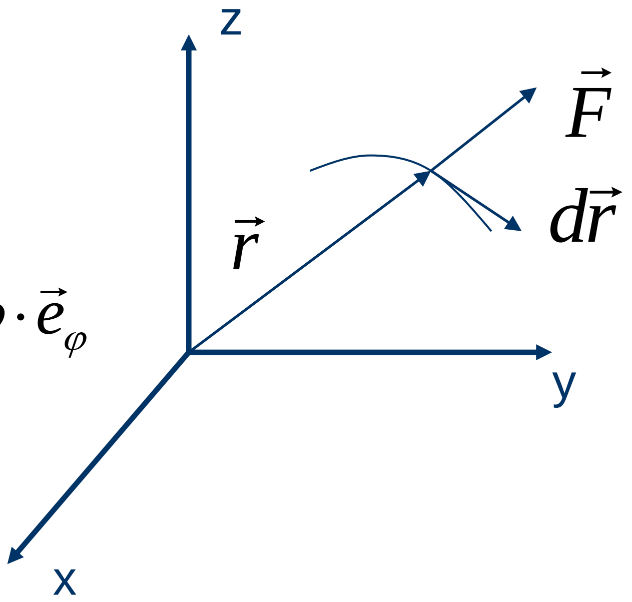
$$F_{упр,x} = -kx$$

$$A_{упр} = \int_1^2 F_{упр} \cdot dx = \int_1^2 (-kx) \cdot dx = \left(-\frac{kx^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{kx_1^{\ 2}}{2} - \frac{kx_2^{\ 2}}{2}$$

Пример 5: Работа центральных сил

$$\vec{F} = F(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\cdot\vec{e}_r$$

$$d\vec{r} = dr\cdot\vec{e}_r + rd\theta\cdot\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\cdot\vec{e}_\varphi$$



$$\int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F\cdot dr$$

Не зависит от формы пути !!!

Потенциальная энергия

Для потенциальных сил

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = d\Pi$$

Для конечной работы $A_{1-2} = \Pi_2 - \Pi_1$

Но работа идет на приращение кинетической энергии $K = \frac{mv^2}{2}$

$$A_{1-2} = K_2 - K_1 = \Pi_2 - \Pi_1$$

$$K_2 - \Pi_2 = K_1 - \Pi_1$$

Определим : $U \equiv -\Pi$

тогда $E_1 = K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = E_2 = const$

При наличии только консервативных сил полная механическая энергия – сохраняется !!!

Потенциальная энергия II

Потенциальная энергия связана с взаимодействием тел и отражает способность тела (или системы тел) совершать работу.

Нулевое положение (начало отсчета) – положение системы, принимаемое за начало отсчета потенциальной энергии.

Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое, называется потенциальной энергией системы в первом положении.

Потенциальная энергия системы зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении и определена с точностью до произвольной постоянной.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии.

Пример: поле тяжести

$$m\dot{\vec{v}} \equiv m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

$$U = mgh$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Убедимся что полная энергия сохраняется

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}(mgh) = m\vec{v}\,\dot{\vec{v}} + mgv_z = 0$$

Связь силы и потенциальной энергии

$$A_{1-2} = U_1 - U_2$$

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(-\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Сила – есть минус градиент потенциальной энергии

Изменение полной энергии в общем случае

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_1^2 \vec{F}^* \cdot d\vec{s} = A_{конс} + A_{12}^* = \left(U_1 - U_2\right) + A_{12}^*$$

Но работа внешних сил идет на изменение кинетической энергии

$$K_2 - K_1 = A_{1-2} = \left(U_1 - U_2\right) + A_{12}^*$$

$$\Downarrow$$

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*$$

Полная энергия изменяется за счет работы неконсервативных сил !!!

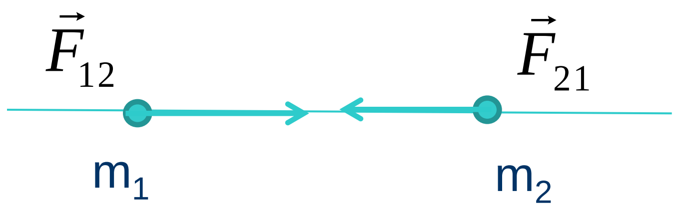
Система невзаимодействующих частиц во внешнем потенциальном поле

Для каждой частицы: $$E_i = K_i + U_i = const$$

Для всей системы : $$E = \sum E_i = const$$

Полная энергия системы невзаимодействующих частиц , на которую действую только консервативные силы – является постоянной

Потенциальная энергия взаимодействия



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_{12} + F_1^{*} & \times dx_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -F_{21} + F_2^{*} & \times dx_2 \end{cases} \quad +$$

$$m_1 \ddot{x}_1 \, dx_1 + m_2 \ddot{x}_2 \, dx_2 = \left(F_{12} dx_1 - F_{21} dx_2\right) + \left(F_1^{*} dx_1 + F_2^{*} dx_2\right)$$

Пусть сила взаимодействия зависит только от расстояния

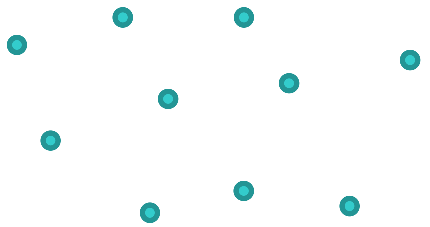
$$F_{12} dx_1 - F_{21} dx_2 = -f(x_2 - x_1) \cdot d\left(x_2 - x_1\right) = -dU\left(x_2 - x_1\right)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 \, dx_1 + m_2 \ddot{x}_2 \, dx_2 = d\left(\frac{m v_1^{\,2}}{2} + \frac{m v_2^{\,2}}{2}\right)$$

$$K + U_{вз} = A_{внешн}$$

Закон сохранения энергии для системы частиц I

Рассмотрим систему N частиц



Силы действующие на частицы:

- силы взаимодействия $\vec{F}_{ik}$
- внешние консервативные силы $\vec{F}_i$
- внешние неконсервативные силы $\vec{F}_i^{\,*}$

$$\sum_i d\vec{r}_i \times \Bigg| \qquad m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{k=1}^{N-1} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\,*}$$

Закон сохранения энергии для системы частиц II

1) $\sum_{i=1}^{N} m_i d\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i dt \cdot \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = d\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^{\,2}}{2}\right) = dK$

2) $\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N-1} \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{\substack{пары \\ k<i}} \left(\vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ki} \cdot d\vec{r}_k\right) = \sum_{\substack{пары \\ k<i}} \left(\vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_k\right) = \sum_{\substack{пары \\ k<i}} \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_{ik} = -dU_{вз}$

3) $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dU_{внешн}$

4) $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^*{}_i \cdot d\vec{r}_i = \delta A^*{}_{внешн}$

$$d\left(K + U_{вз} + U_{внешн}\right) = \delta A^*{}_{внешн}$$

Закон сохранения энергии для системы частиц III

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется её **полной механической энергией**

$$E \equiv K + U_{вз} + U_{внешн}$$

$$dE = \delta A^{*}_{внешн}$$

Изменение полной механической энергии системы происходит за счет работы внешних неконсервативных сил

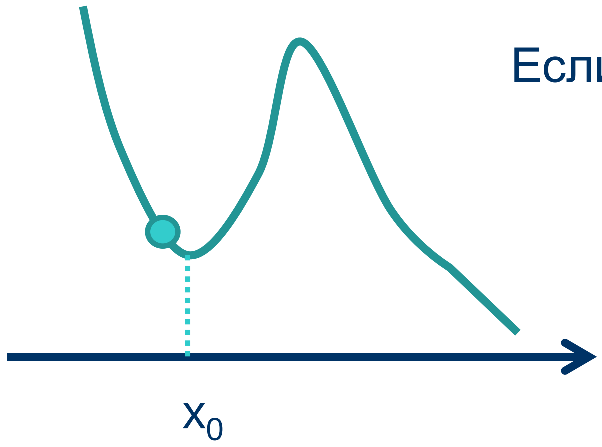
Если неконсервативных сил нет: $\delta A^{*}_{внешн} = 0$

$$E = const$$

В системе с одними только консервативными силами полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить только превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно.

Условие равновесия механической системы

Рассмотрим материальную точку с одной степенью свободы (бусина на проволоке)



Если трения нет, то полная энергия сохраняется

$$E = K + U = const$$

Кинетическая энергия может увеличиваться только за счет уменьшения потенциальной

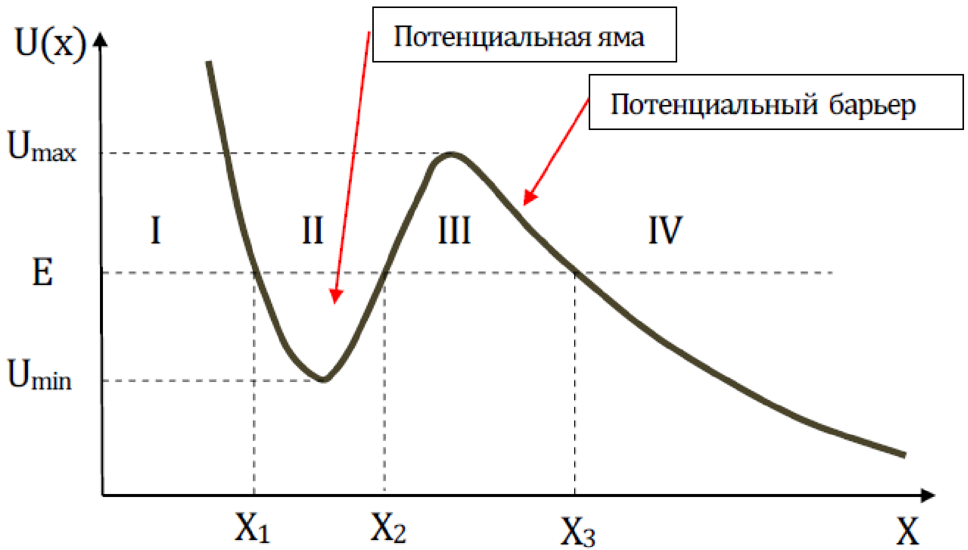
Минимум потенциальной энергии – есть точка равновесия !!!

С другой стороны условие минимума :

$$\frac{dU}{dx} = F_x = 0$$

В точке минимума силы равны нулю

Финитные и инфинитные движения

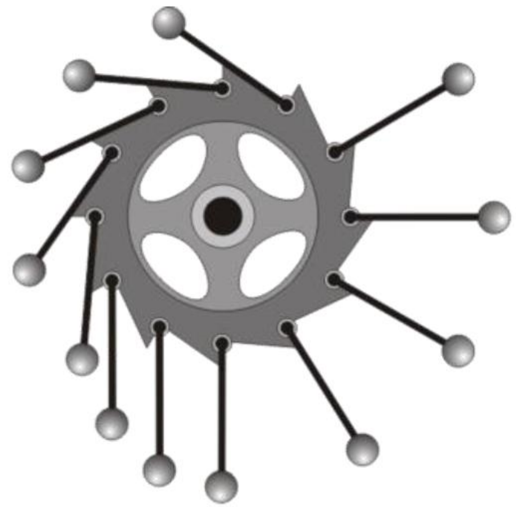


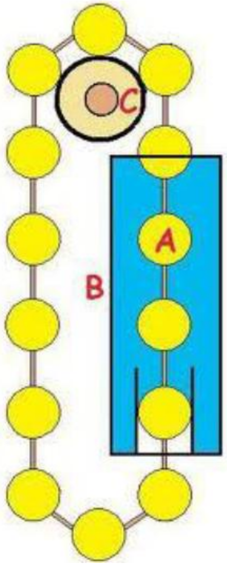
- В области II частица с энергией Е совершает финитное движение.
- В области IV частица с энергией Е совершает инфинитное движение.
- В областях I и III частица с энергией Е не может находиться .

Общефизический закон сохранения энергии

Энергия никогда не создается и никогда не уничтожается, она может переходить из одной формы в другую, или от одной части системы к другой.

Проекты вечных двигателей:





Соударение 2-х тел: I

Удар->Деформация->Увеличение потенциальной энергии взаимодействия ->Увеличение внутренней энергии (нагрев) ->Разлет

2 предельных случая

Абсолютно упругий удар

Абсолютно неупругий удар

Соударение 2-х тел: II

1) Абсолютно упругий удар: механическая энергия не теряется. Удар-деформация-разлет. Законы сохранения энергии и импульса.

2) **Абсолютно неупругий удар**: энергия удара переходит во внутреннюю энергию.
Удар-слипаются- далее движутся вместе как единое целое.
Закон сохранения импульса.

Абсолютно неупругий удар

Удар -> слипаются -> далее движутся вместе как единое целое.

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}}{m_1 + m_2}$$

Абсолютно упругий центральный удар I

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_{10}{}^2}{2} + \dfrac{m_2 v_{20}{}^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1{}^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2{}^2}{2} & 1.1 \\ m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 & 1.2 \end{cases}$$

Переписшем 1.1 в другом виде: $\dfrac{m_1 v_{10}{}^2}{2} - \dfrac{m_1 v_1{}^2}{2} = \dfrac{m_2 v_2{}^2}{2} - \dfrac{m_2 v_{20}{}^2}{2}$

$$m_1\left(v_{10}{}^2 - v_1{}^2\right) = m_2\left(v_2{}^2 - v_{20}{}^2\right)$$

$$m_1\left(\vec{v}_{10} - \vec{v}_1\right)\left(\vec{v}_{10} + \vec{v}_1\right) = m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}\right)\left(\vec{v}_2 + \vec{v}_{20}\right)$$

Абсолютно упругий центральный удар II

В результате получаем исходную систему в измененном виде:

$$\begin{cases} m_1\left(\vec{v}_{10}-\vec{v}_1\right)\left(\vec{v}_{10}+\vec{v}_1\right)=m_2\left(\vec{v}_2-\vec{v}_{20}\right)\left(\vec{v}_2+\vec{v}_{20}\right) \\ m_1\left(\vec{v}_{10}-\vec{v}_1\right)=m_2\left(\vec{v}_2-\vec{v}_{20}\right) \end{cases}$$

Отсюда следует, что:

$$\vec{v}_{10}+\vec{v}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_{20}$$

Абсолютно упругий центральный удар III

$$\begin{cases} m_1\left(\vec{v}_{10}-\vec{v}_1\right)=m_2\left(\vec{v}_2-\vec{v}_{20}\right) \\ \vec{v}_{10}+\vec{v}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_{20} \qquad \Big|\times m_2 \end{cases} \quad -$$

$$\left(m_1-m_2\right)\vec{v}_{10}-\left(m_1+m_2\right)\vec{v}_1=-2m_2\vec{v}_{20}$$

$$\vec{v}_1=\frac{\left(m_1-m_2\right)\vec{v}_{10}+2m_2\vec{v}_{20}}{m_1+m_2}$$

Абсолютно упругий центральный удар IV

$$\begin{cases} m_1\left(\vec{v}_{10}-\vec{v}_1\right)=m_2\left(\vec{v}_2-\vec{v}_{20}\right) \\ \vec{v}_{10}+\vec{v}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_{20} \qquad \Big|\times m_1 \end{cases} \quad +$$

$$2m_1\vec{v}_{10}=\left(m_1+m_2\right)\vec{v}_2+\left(m_1-m_2\right)\vec{v}_{20}$$

$$\vec{v}_2=\frac{2m_1\vec{v}_{10}+\left(m_2-m_1\right)\vec{v}_{20}}{m_1+m_2}$$