Общая физика
Лекция 10 Статистическая физика

Трушин Олег Станиславович
Зав. лаб. ЯФ ФТИАН РАН,
Доц. каф. нанотехнологии в электронике ЯрГУ

План лекции

- Теория вероятностей
- Случайные величины с непрерывным спектром
- Характер теплового движения молекул
- Телесный угол
- Число ударов молекул о стенку
- Давление газа на стенку
- Средняя энергия молекул
- Теорема о равнораспределении энергии
- Распределение Максвелла
- Макро и микросостояния. Статистический вес
- Энтропия

Теория вероятностей I

$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots x_s$ Дискретные значения величины

$N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_k, \ldots N_s$ Число выпадений результата

$N_1 + N_2 + \ldots + N_i + \ldots + N_k + \ldots + N_s = N$ Полное число испытаний

$\frac{N_i}{N}$ - Относительная частота

$P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}$ - Вероятность появления результата

$\sum_{i=1}^{s} P_i = \sum_{i}^{s} \frac{N_i}{N} = 1$ - Условие нормировки вероятности

Статистический ансамбль

Либо много раз бросаем 1 кубик

Либо берем много одинаковых кубиков
и бросаем по 1 разу каждый из них

Набор одинаковых систем, находящихся в одинаковом состоянии называется **СТАТИСТИЧЕСКИМ АНСАМБЛЕМ**

Теоремы вероятности

$$\boxed{P(i \cup k) = \frac{N_i + N_k}{N} = P_i + P_k}$$

Теорема сложения вероятностей

Пусть измеряются две независимые величины одновременно x_i и y_k, тогда:

$$N(x_i \cap y_k) = N(x_i) \cdot P(y_k) = [P(x_i)N] \cdot P(y_k)$$

$$\boxed{P(x_i \cap y_k) = P(x_i) \cdot P(y_k)}$$

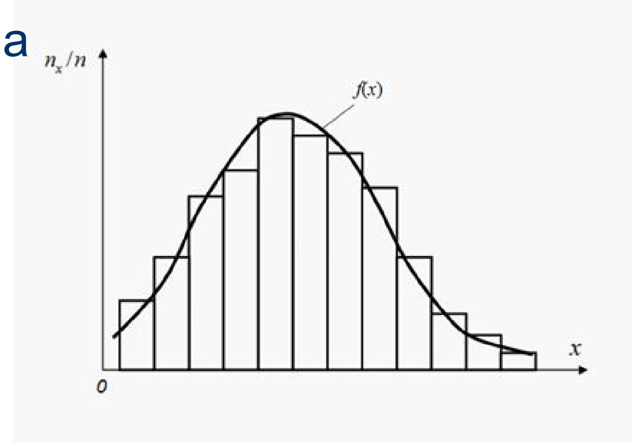
Теорема умножения вероятностей

$$\boxed{\langle x \rangle \equiv \frac{\sum_{i=1}^{s} N_i \cdot x_i}{N} = \sum_{i=1}^{s} P_i \cdot x_i}$$

Среднее значение величины

Случайные величины с непрерывным спектром

$x \in [0, \infty)$ Непрерывная случайная величина



$f(x)$ Функция распределения вероятностей

$dP_x = f(x)dx$ Вероятность попадания в интервал

$$\int dP_x = \int f(x)dx = 1$$

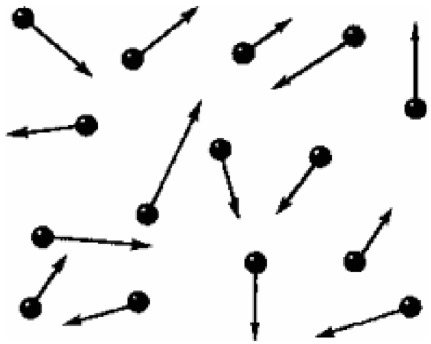
Условие нормировки

$$\langle x \rangle = \int x dP_x = \int x f(x)dx$$

Формула среднего значения

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int \varphi(x) dP_x = \int \varphi(x) f(x) dx$$

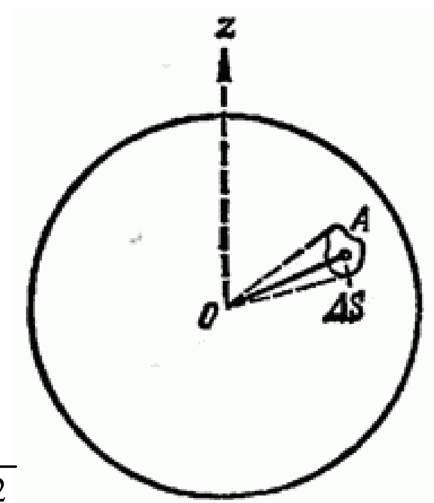
Характер теплового движения молекул



N - молекул

- **Все направления равновероятны**
- **Слишком большие скорости маловероятны**
- **Слишком малые скорости маловероятны**

Направления движения можно изобразить точками на сфере



Плотность изображающих точек везде на сфере одинакова

$$\rho = \frac{N}{4\pi r^2}$$

Число молекул летящих в направлении точки площадки ΔS

$$\Delta N_A = N\frac{\Delta S}{4\pi r^2}$$

Телесный угол

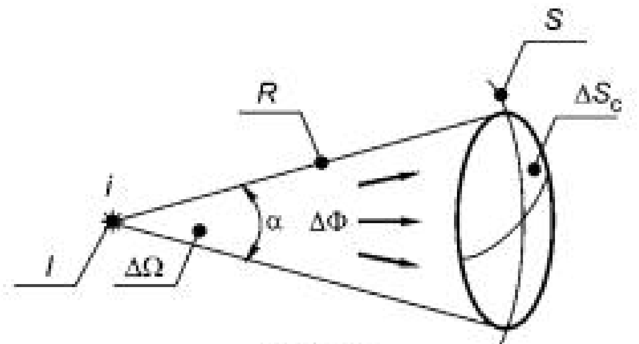
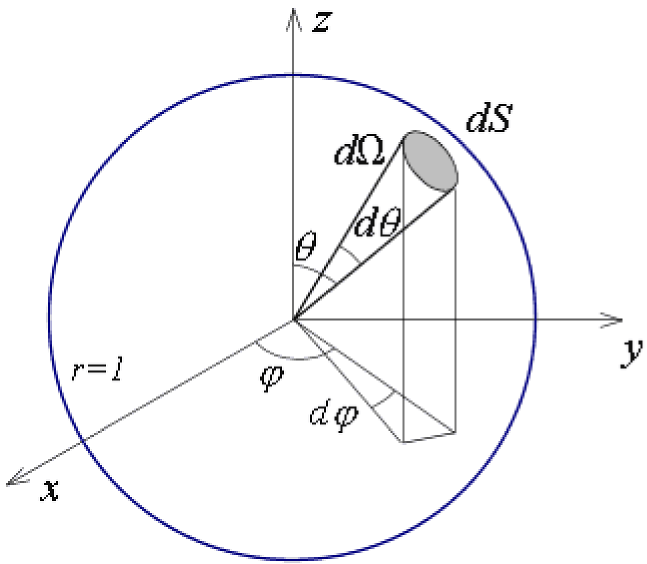


Рис. 2.2
Определение телесного угла

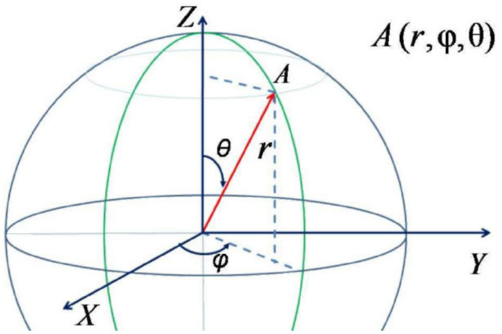
$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta S}{R^2}$$

В сферических координатах

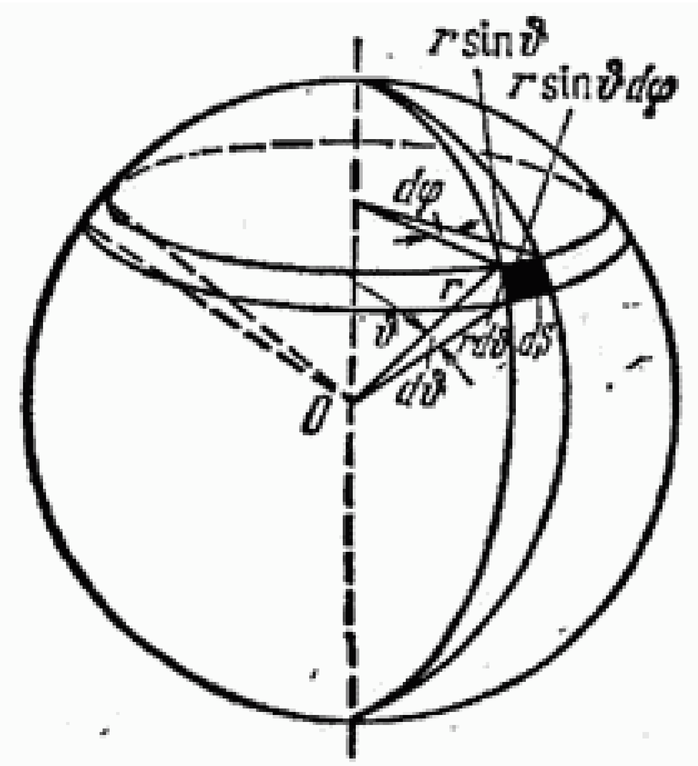
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$



Элемент телесного угла в сферических координатах



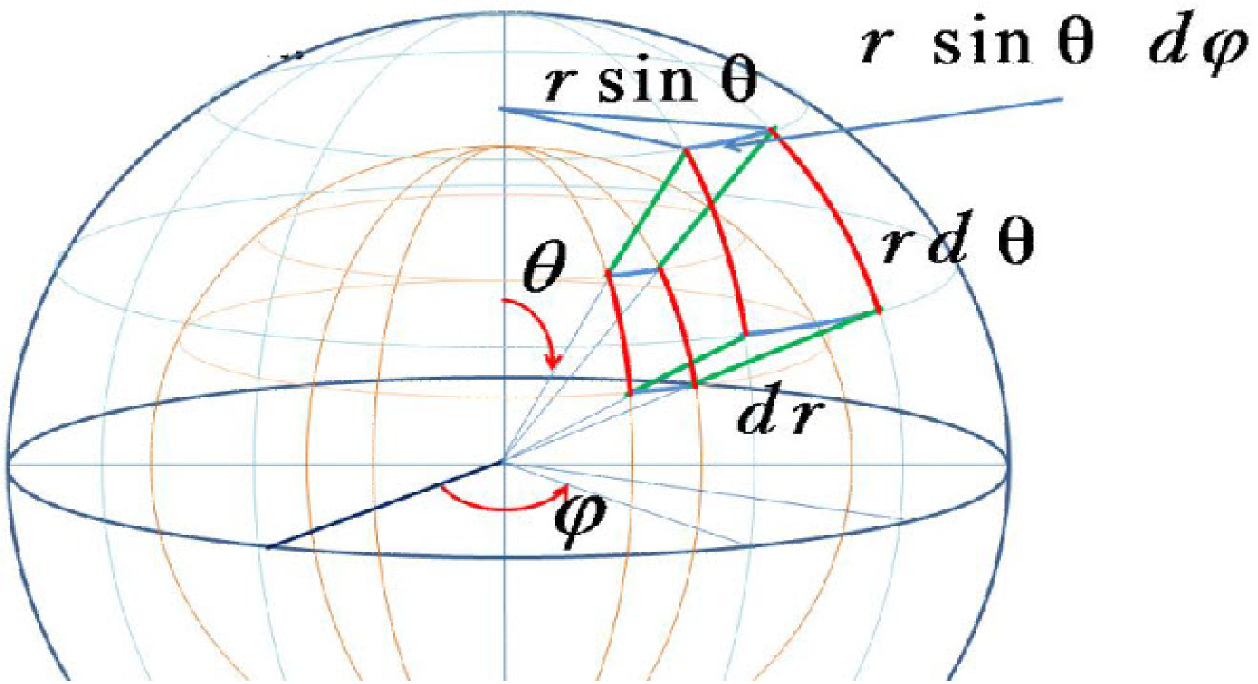
$$dS = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$



$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Элемент объема в сферических координатах

$$dV = r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$



Число ударов молекул о стенку I

$$dN_{\theta\varphi} = N\frac{d\Omega_{\theta\varphi}}{4\pi} = N\frac{\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi}{4\pi}$$

Число молекул летящих в направлении θ,φ

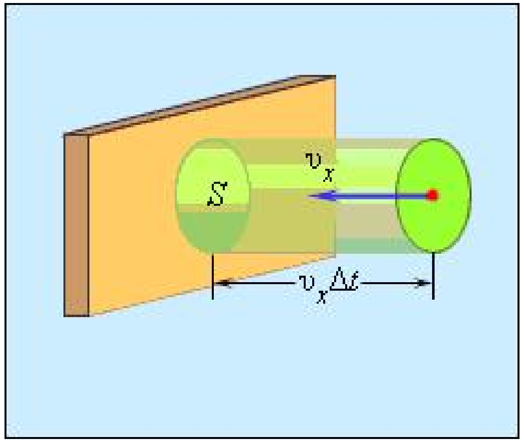
dN_v Число молекул в сосуде имеющих скорость в интервале $[v, v+dv]$

$$dN_{v,\theta,\varphi} = dN_v\frac{d\Omega_{\theta,\varphi}}{4\pi}$$

Из них летящих в направлении θ,φ

Из выделенных молекул долетят за время Δt до площадки dS и ударятся о нее молекулы, заключенные в цилиндре с основанием ΔS и высотой $v\cos\theta dt$

$$d\eta_{v,\theta,\varphi} = dN_v\frac{d\Omega_{\theta,\varphi}}{4\pi}\cdot\frac{\Delta S v\cos\theta\Delta t}{V}$$



Число ударов молекул о стенку II

Чтобы получить полное число ударов – нужно просуммировать по телесному углу 2π и по скоростям от 0 до v_{max}

1) Сумма по углам: $$d\eta_v = \frac{dN_v v\Delta S\Delta t}{4\pi V}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{dN_v v\Delta S\Delta t}{4V}$$

2) Сумма по скоростям:

$$\langle v\rangle \equiv \frac{1}{N}\int_0^{v_{\max}} v dN_v$$

$$\eta_{\Delta S\Delta t} = \frac{\Delta S\Delta t}{4V}\int_0^{v_{\max}} v dN_v = \frac{\Delta S\Delta t}{4V}N\langle v\rangle = \frac{1}{4}\Delta S\Delta t n\langle v\rangle$$

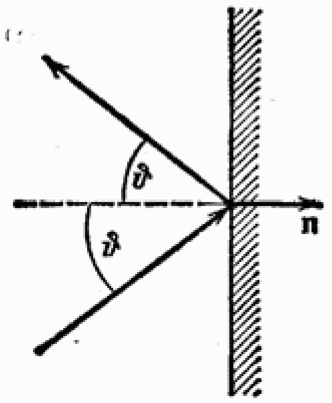
$$n \equiv \frac{N}{V}$$

Число ударов на единицу площади и в единицу времени

$$\boxed{\eta = \frac{1}{4}n\langle v\rangle}$$

Давление газа на стенку

Импульс передаваемый стенке одной молекулой $2mv\cos\theta$



Элементу стенки ΔS за время Δt сообщается суммарный импульс от молекул летящих из элемента телесного угла:

$$dK_{v,\theta,\varphi} = 2mv\cos\theta \cdot d\eta_{v\theta\varphi} = dN_v \frac{d\Omega_{\theta\varphi}}{4\pi} \cdot \frac{2mv^2\cos^2\theta\Delta S\Delta t}{V}$$

1) Суммируем по углам прилета

$$dK_v = dN_v \frac{2mv^2\Delta S\Delta t}{4\pi V}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = dN_v\frac{mv^2\Delta S\Delta t}{3V}$$

2) Суммируем по скоростям

$$\Delta K = \frac{m\Delta S\Delta t}{3V}\int_0^{v_{\max}}v^2 dN_v = \frac{m\Delta S\Delta t}{3V}N\left\langle v^2\right\rangle = \frac{1}{3}nm\left\langle v^2\right\rangle\Delta S\Delta t$$

$$\boxed{p = \frac{\Delta K}{\Delta S\Delta t} = \frac{1}{3}nm\left\langle v^2\right\rangle = \frac{2}{3}n\frac{m\left\langle v^2\right\rangle}{2} = \frac{2}{3}n\left\langle\varepsilon_{\text{пост}}\right\rangle}$$

Средняя энергия молекул

Сравним выражения для давления:

Вывод в статистической физике	Уравнение состояния для идеального газа
$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$	$p = nkT$

$$\boxed{\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT}$$

Абсолютная температура – есть мера средней энергии поступательного движения молекул

Равнораспределение энергии по степеням свободы

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2}kT \qquad \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}$$

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x{}^2 \rangle + \langle v_y{}^2 \rangle + \langle v_z{}^2 \rangle$$

$$\boxed{\langle v_x{}^2 \rangle = \frac{kT}{m}}$$

На каждую степень свободы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия равная:

$$\boxed{\frac{1}{2}kT}$$

Степени свободы молекулы

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы

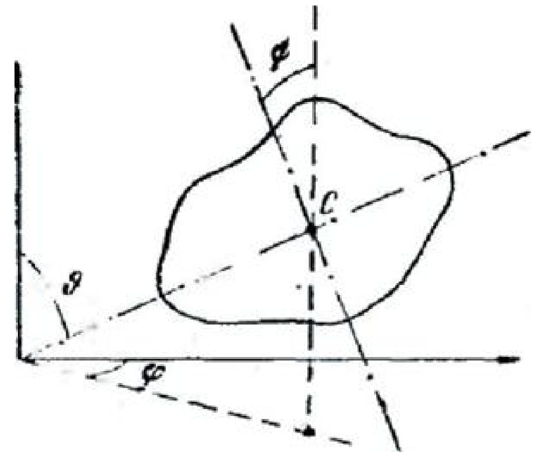
Поступательные степени свободы (x,y,z)

Вращательные степени свободы (θ,φ,ψ)

Колебательные степени свободы

Число степеней свободы - i

$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2 \cdot n_{\text{колеб}}$$



Степени свободы молекул II

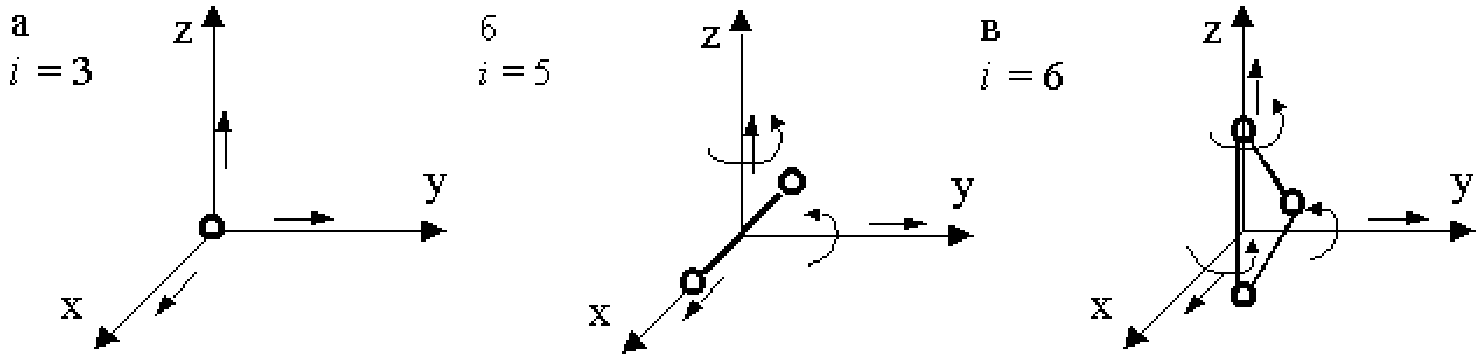
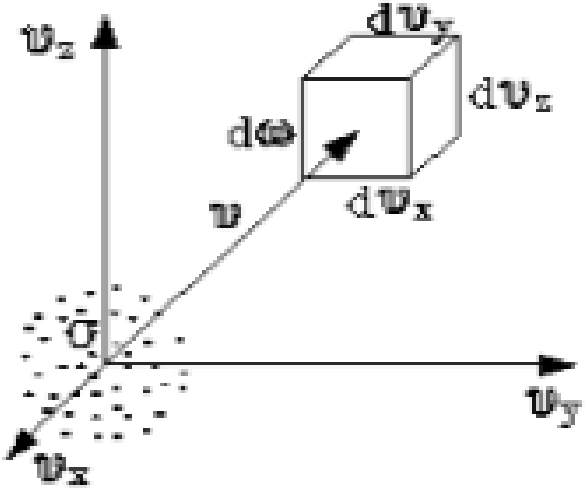


Рис. 3.1. Степени свободы молекул вещества

Средняя кинетическая энергия молекул

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$$

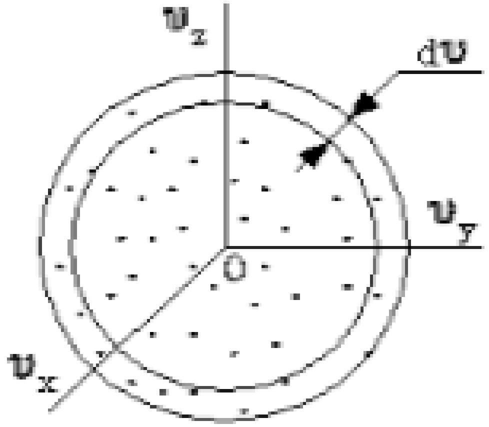
Распределение Максвелла I



$$dN_{v_x, v_y, v_z} = Nf(v)\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$dN_v = Nf(v)4\pi v^2 dv$$

$$dP_v = f(v)4\pi v^2 dv$$



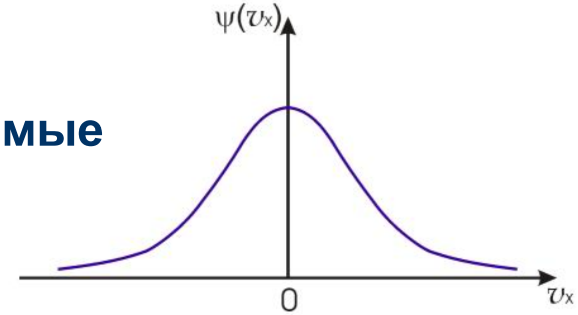
Функция распределения газа по скоростям

$$\boxed{F(v) = f(v)4\pi v^2}$$

Распределение Максвелла II

$$dP_{v_x} = \varphi(v_x)dv_x$$
$$dP_{v_y} = \varphi(v_y)dv_y$$
$$dP_{v_z} = \varphi(v_z)dv_z$$

Статистически независимые



По теореме о произведении вероятностей

$$dP_{v_x,v_y,v_z} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z$$

С другой стороны ранее получили:

$$dP_{v_x,v_y,v_z} = f(v)dv_x dv_y dv_z$$

$$\boxed{f(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)}$$

Распределение Максвелла III

$$f(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

$$\ln f(v) = \ln\varphi(v_x) + \ln\varphi(v_y) + \ln\varphi(v_z)$$

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x}\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}} = \frac{v_x}{v}$$

$$\boxed{\frac{f'(v)}{f(v)} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x}}$$

Распределение Максвелла IV

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x} = -\alpha \qquad \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x$$

$$\ln \varphi(v_x) = -\alpha \frac{v_x^{\ 2}}{2} + \ln A \qquad \boxed{\varphi(v_x) = Ae^{-\frac{\alpha v_x^{\ 2}}{2}}}$$

$$\alpha > 0$$

$$\varphi(v_x) = Ae^{-\frac{\alpha v_x^{\ 2}}{2}} \qquad \varphi(v_y) = Ae^{-\frac{\alpha v_y^{\ 2}}{2}} \qquad \varphi(v_z) = Ae^{-\frac{\alpha v_z^{\ 2}}{2}}$$

Константа нормировки

Условие нормировки функции распределения

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha v_x{}^2}{2}}\,dv_x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Интеграл Пуассона

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$$

$$\boxed{\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\alpha v_x{}^2}{2}}}$$

Нахождение константы α

$$\left\langle v_x{}^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x{}^2 \cdot \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x{}^2 e^{-\frac{\alpha v_x{}^2}{2}} dv_x$$

Взятие интеграла методом дифференцирования по параметру

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$$

$$\left\langle v_x{}^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\left\langle v_x{}^2 \right\rangle = \frac{kT}{m}$$

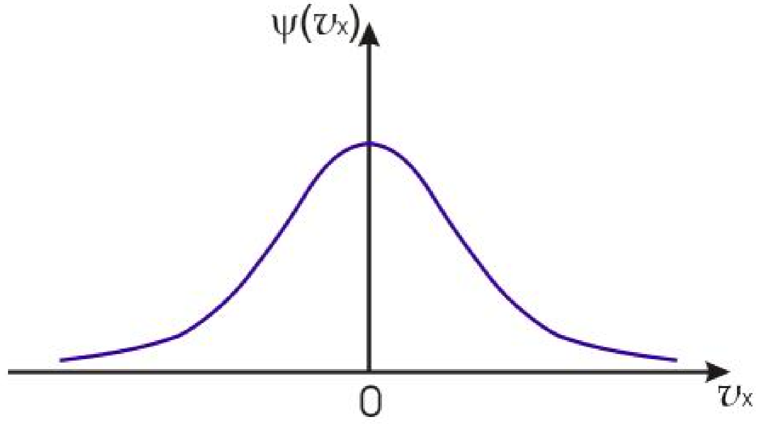
$$\boxed{\alpha = \frac{m}{kT}}$$

Распределение Максвелла по компонентам скорости

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{m{v_x}^2}{2kT}}$$

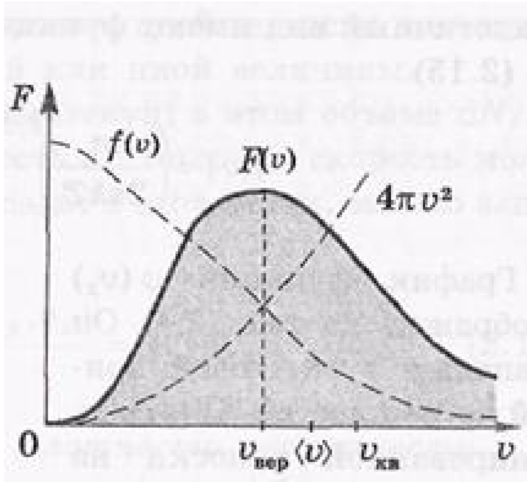
$$\varphi(v_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{m{v_y}^2}{2kT}}$$

$$\varphi(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{m{v_z}^2}{2kT}}$$

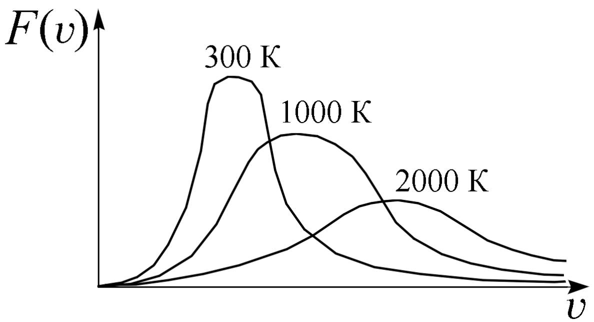


Распределение по модулю скорости I

$$f(v)=\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$



$$\boxed{f(v)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$



$$\boxed{F(v)=f(v)4\pi v^2=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}4\pi v^2}$$

Распределение по модулю скорости II

Средняя скорость

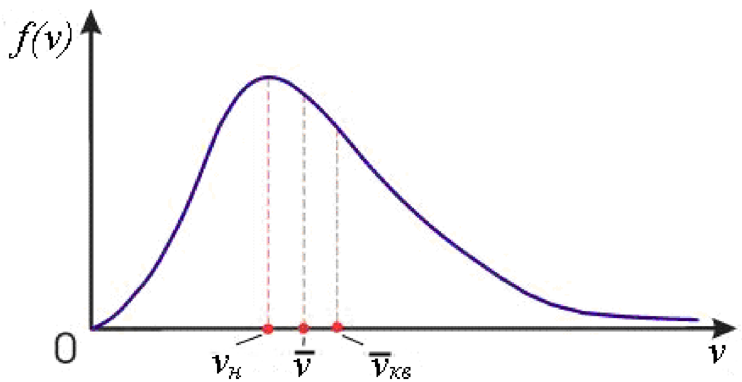
$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vF(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Средний квадрат скорости

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^4 dv = \frac{3kT}{m}$$

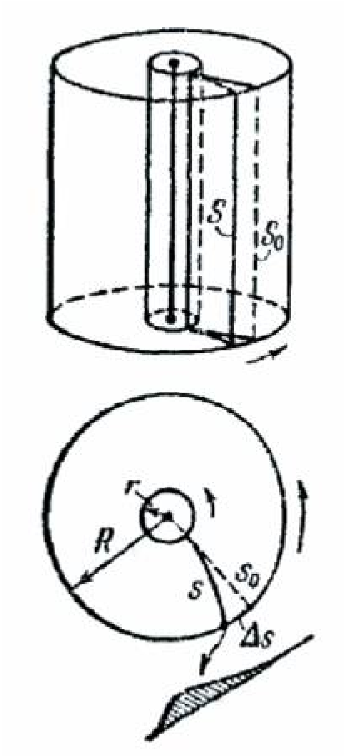
Наиболее вероятная скорость

$$F'(v) = 0 \qquad v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$



Экспериментальная проверка распределения Максвелла

1) Опыт Штерна 1920 г.



2) Опыт Ламмерта 1929 г.

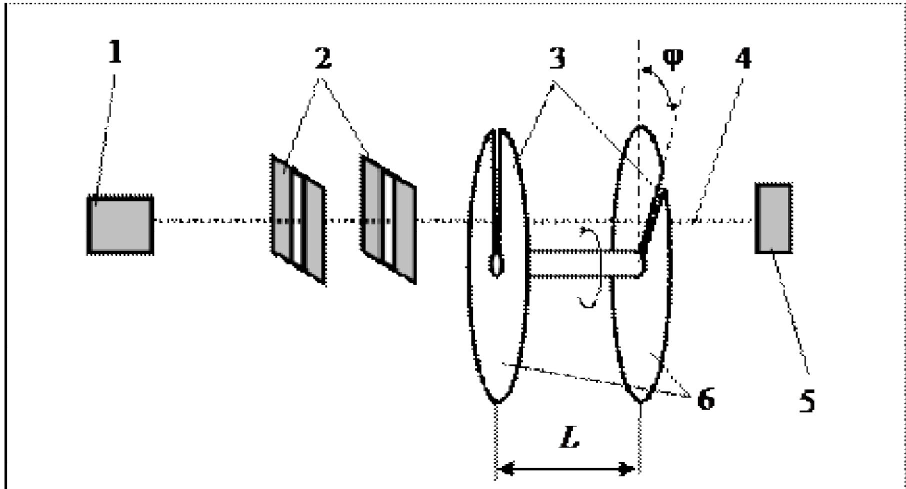


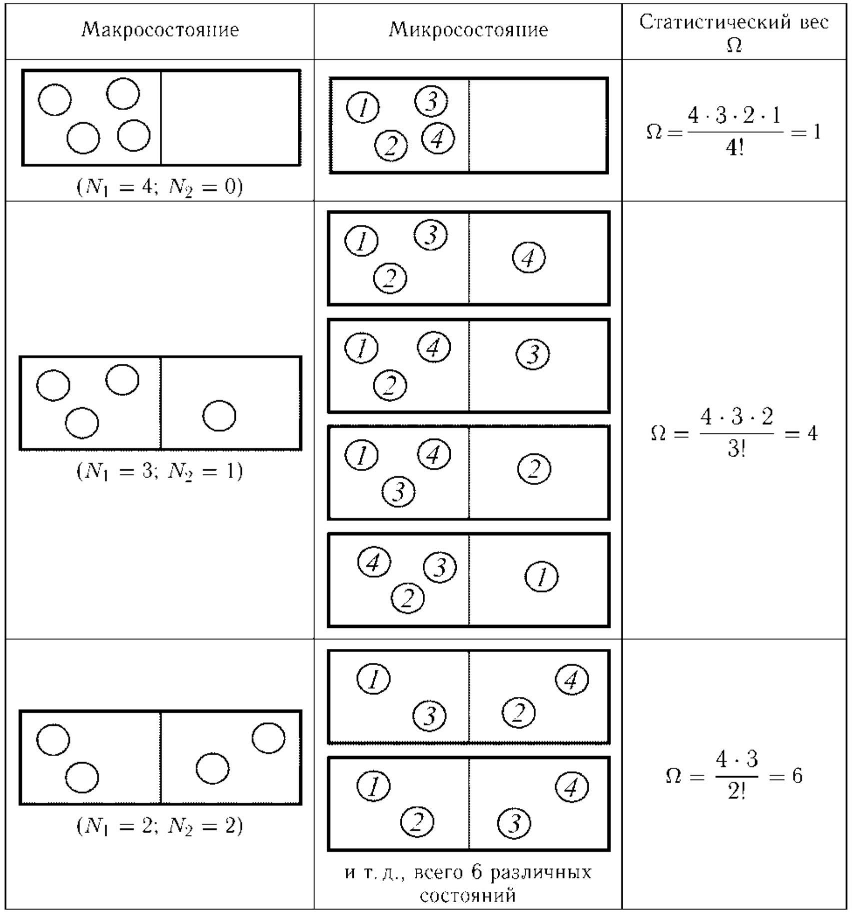
Схема опыта Ламмерта: 1 – печь; 2 – коллиматор; 3 – узкие щели; 4 – траектория молекул; 5 – детектор; быстро вращающиеся диски

Макро- и микросостояния. Статистический вес

<u>Макросостояние</u> может быть задано с помощью макропараметров (p,V,T, …)

<u>Микросостояние</u> может быть задано с помощью $\vec{r}_i, \vec{v}_i, \ldots$ микропараметров

Число различных микросостояний, соответствующих данному макросостоянию называется <u>статистическим весом</u>

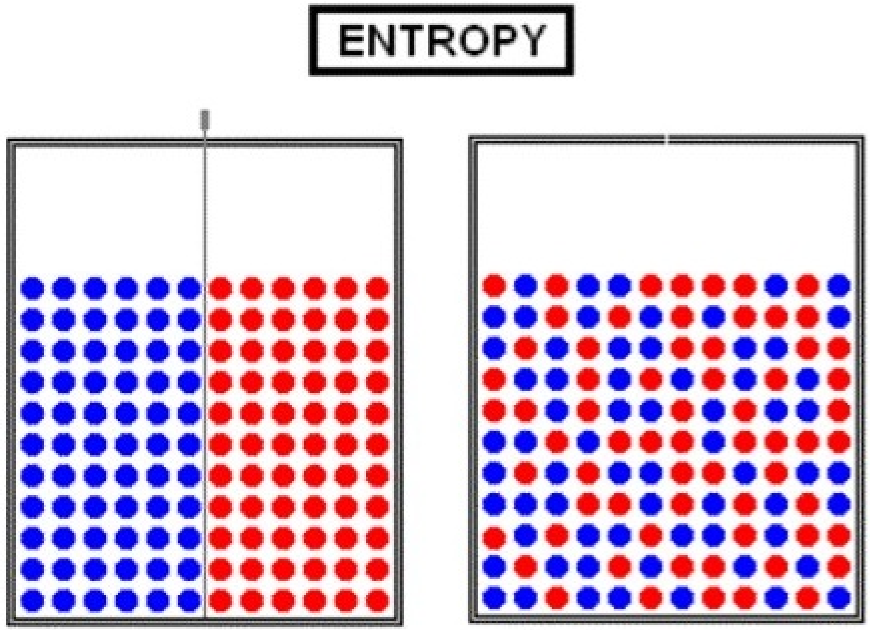


Энтропия

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2$$

$$\boxed{S \equiv k \cdot \ln \Omega}$$



1. Энтропия изолированной системы возрастает
2. Энтропия системы в равновесии максимальна