Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **5** (2012) 40–49

УДК 517.9

Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии

Куликов Д. А., Рудый А. С.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kulikov_d_a@mail.ru, rudy@uniyar.ac.ru

получена 22 сентября 2012

Ключевые слова: бифуркации и устойчивость, волновой нанорельеф, пространственно-неоднородные решения

Рассматривается нелокальное уравнение эрозии, которое получено как одна из математических моделей формирования нанорельефа под воздействием потока ионов. Изучен один из механизмов формирования неоднородного нанорельефа. При математическом анализе периодической краевой задачи для нелокального уравнения эрозии использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Вопрос о локальных бифуркациях однородного состояния равновесия сводится к изучению структуры окрестности нулевого решения трехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом использован метод интегральных многообразий в сочетании с аппаратом нормальных форм Пуанкаре–Дюлака.

Введение. В работе предполагается рассмотреть нелокальную математическую модель, которая была предложена в работах [1–3]. Эта математическая модель была получена на основе теории П. Зигмунда [4]. Следует отметить, что иная, достаточно известная математическая модель формирования неоднородного рельефа под воздействием ионной бомбардировки также базируется на основополагающих идеях П. Зигмунда. Это уравнение называют уравнением Бредли–Харпера [5]. Иногда это уравнение называют обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского [6].

Итак, в данной работе изучению подлежит уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial w}{\partial x} + u - w + b\big(u-w\big)\frac{\partial w}{\partial x} + dc\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 - bd\big(u-w\big)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2, \qquad (1)$$

где $u = u(t,x), w = w(t,x) = u(t,x-1)$, коэффициенты c, b, d зависят от угла Θ между направляющей потока ионов и нормалью к невозмущенной поверхности. Их

[1]Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательской работы Центра коллективного пользования научным оборудованием "Диагностика микро- и наноструктур" при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

конкретный вид в различных ситуациях определяется на основании теории П. Зигмунда (см. [1–4]). Особую роль играет обобщенный коэффициент диффузии. Отметим особо, что уравнение (1) приведено в перенормированном виде. В частности, $u(t,x)$ – нормированный изгиб поверхности, который появляется вследствие воздействия потока ионов. Коэффициент a зависит и от угла Θ, а главное, обратно пропорционален интенсивности потока. Подчеркнем, что его уменьшение соответствует увеличению интенсивности потока ионов.

Уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2) = u(t,x). \tag{2}$$

Выбор таких условий обоснован традицией и естественен с физической точки зрения [1–3]. Вероятно, возможен и иной вариант выбора краевых условий, но большинство авторов предпочитают именно такой (см., например, [5–6]).

Особенностью краевой задачи (1), (2) является наличие решения

$$u(t,x) = h \ (h = const),$$

а постоянная h зависит от варианта введения системы координат. Поэтому без нарушения общности можно считать, что $h = 0$ – основное невозмущенное состояние равновесия.

Пусть

$$u(0,x) = f(x), \tag{3}$$

т.е. задан начальный рельеф, который возник еще до начала обработки. Он не обязательно идеален, ($f(x) \equiv 0$), так как начальные неровности (обычно достаточно малые) возникают при изготовлении мишени. В работе далее будет указан способ формирования неоднородного рельефа (нанорельефа) как одного из аттракторов нелинейной эволюционной задачи (1),(2),(3). Пространство начальных условий принято называть фазовым пространством. В нашем случае естественно в качестве фазового пространства выбрать H_2^2 – пространство Соболева, состоящее из тех 2-периодических функций $f(x) \in L_2(0,2)$, у которых существуют обобщенные производные $f'(x), f''(x), \in L_2(0,2)$ [7]. В силу теоремы вложения Соболева все такие функции $f(x) \in C^1[0,2]$ и, естественно, остаются периодическими. Такой вариант выбора фазового пространства будет мотивирован в следующем разделе работы. Ниже речь пойдет об устойчивости тех или иных решений. Ниже устойчивость будем понимать в смысле нормы пространства H_2^2. Пусть $f(x) \in H_2^2$. Напомним, что норма в H_2^2 вводится равенством

$$||f(x)||_{H_2^2} = ||f(x)||_{L_2(0,2)} + ||f'(x)||_{L_2(0,2)} + ||f''(x)||_{L_2(0,2)}, ||g(x)||_{L_2(0,2)} = \sqrt{\int\limits_0^2 g^2(x)dx}.$$

1. Линеаризованная краевая задача. В этом разделе рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \tag{4}$$

где линейный дифференциальный оператор A определен равенством

$$Au = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial w}{\partial x} + u - w.$$

Если дополнить уравнение (4) периодическими краевыми условиями (2) и начальным условием (3), то эта задача может быть проинтегрирована в явном виде методом Фурье. Действительно,

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(i\pi nx),\ \ w(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)(-1)^n\exp(i\pi nx),$$

а коэффициенты данных рядов определяются как решения счетной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_n = -(\pi n)^2 a u_n - c\pi n i(-1)^n u_n + (1-(-1)^n)u_n, \tag{5}$$

дополненные начальными условиями

$$u_n(0) = f_n. \tag{6}$$

Здесь f_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, при разложении $f(x)$ в ряд Фурье в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\exp(i\pi nx).$$

Элементарно проверяется, что для решений задачи (5), (6) справедливы равенства

$$\begin{gathered} u_n(t) = f_n\exp(\lambda_n t),\ \ \lambda_n = -(\pi n)^2 a - c\pi n i(-1)^n + (1-(-1)^n), \\ Re\lambda_n = -(\pi n)^2 a + (1-(-1)^n),\ \ Im\lambda_n = -c\pi n(-1)^n. \end{gathered} \tag{7}$$

Комплексные числа λ_n являются собственными значениями линейного оператора A. Их расположение на комплексной плоскости показывает (см., например, с. 92–96 из [8]), что оператор A является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов. Линейная краевая задача (4),(2),(3) по своим свойствам может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений. Этот факт и работы [9–11] дают основание считать, что и нелинейная краевая задача (1),(2),(3) локально корректно разрешима (см., например, теорему 7 из работы [11]).

Перейдем к вопросу об устойчивости нулевого состояния равновесия. Стандартный анализ формул (7) показывает, что при $a > a_{\text{кр}} = 2/\pi^2$ выполнено неравенство $Re\lambda_n < 0, n = \pm1, \pm2, \ldots, \lambda_0 = 0$, и следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 1. *Нулевое решение краевой задачи (4), (2), (3) устойчиво, если*

$$a > a_{\kappa p} = \frac{2}{\pi^2}$$

и теряет устойчивость, если

$$a < a_{\kappa p}.$$

При $a = a_{кр}$ *спектру устойчивости данной краевой задачи принадлежат собственные значения*

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = i\sigma,\ \lambda_{-1} = -i\sigma,\ \sigma = \pi c.$$

Им соответствуют собственные функции

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = \exp(i\pi x),\ e_{-1}(x) = \exp(-i\pi x).$$

Остальные точки спектра устойчивости (собственные значения линейного оператора A) лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$Re\lambda \le -\gamma_0 < 0.$$

2. Нормальная форма нелинейной краевой задачи. Возвратимся к рассмотрению нелинейной краевой задачи (1), (2), в которой положим $a = a_{\text{кр}}(1+a_0\varepsilon)$, где

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ a_0 = \pm 1.$$

Последнее означает, что в дальнейшем будем рассматривать ε как малый параметр. Рассмотрение двух значений для a_0 позволяет проанализировать два случая: докритический и послекритический в задаче об устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2), считая при этом малый параметр $\varepsilon \ge 0$. Ниже будем считать, что A обозначает линейный оператор, который определен равенством

$$Au = a_{\text{кр}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial w}{\partial x} + u - w,\ w(t,x) = u(t, x-1).$$

При $a = a_{\text{кр}}(1 + a_0\varepsilon)$ эволюционная нелинейная краевая задача (1), (2), (3) имеет гладкое трехмерное инвариантное многообразие (центральное многообразие в современной терминологии, см., например, [12], гл. 2 из [13]).

Последнее, в частности, означает следующее. Положим

$$u(t,x) = v(t,x) + y(t,x),$$

где

$$y(t,x) = \sum_{k=2}^{\infty} y_k(t)\exp(i\pi k x) + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{y}_k \exp(-i\pi k x),$$
$$v(t,x) = v_0(t) + v_1(t)\exp(i\pi x) + \overline{v}_1(t)\exp(-i\pi x).$$

Тогда изучение динамики всех решений, принадлежащих трехмерному инвариантному многообразию и достаточно малой окрестности состояния равновесия, сводится к рассмотрению аналогичных вопросов для системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_0 = g_0(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon),\ \dot{v}_1 = g_1(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon),\ \dot{\overline{v}}_1 = \overline{g}_1(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon),$$

где $g_j(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции в некоторой окрестности начала координат. Отметим одну существенную особенность краевой задачи (1), (2), (3).

Для нее функции $g_0(v_1, \overline{v}_1), g_1(v_1, \overline{v}_1, \varepsilon), \overline{g}_1(v_1, \overline{v}_1, \varepsilon)$ не зависят от v_0, а $g_0(v_1, \overline{v}_1)$ не зависит и от ε. Первое утверждение вытекает из следующего простого замечания. Пусть $u(t, x) = u_0(t) + p(t, x)$, где $\int_0^2 p(t, x)dx = 0$. Тогда элементарно проверяется равенство

$$A(u_0(t) + p(t, x)) + F(u_0(t) + p(t, x)) = Ap(t, x) + F(p(t, x)),$$

где через $F(u)$ обозначена сумма всех нелинейных слагаемых из правой части нелинейного дифференциального уравнения (1). Добавим также, что линейный дифференциальный оператор A имеет нулевое собственное значение при любом выборе коэффициентов и, следовательно, $\lambda_0 = 0$ при всех рассматриваемых ε.

Правые части нормальной формы, т.е. вид функций $g_0, g_1, \overline{g}_1$, будем искать, используя специальный алгоритм (см., например, [14]).

Динамику решений на трехмерном инвариантном многообразии в случае краевой задачи (1), (2) определяет система обыкновенных дифференциальных уравнений – нормальная форма

$$\begin{gathered} \psi' = d_0|z|^2, \\ z' = (\alpha + i\beta)z + (d_1 + id_2)z|z|^2, \ \overline{z'} = (\alpha - i\beta)\overline{z} + (d_1 - id_2)\overline{z}|z|^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь выписана главная часть нормальной формы (укороченный вариант), а ее коэффициенты $d_0, d_1, d_2, \alpha, \beta \in R, \ \psi = \psi(s), z = z(s), s = \varepsilon t$. Подчеркнем еще раз, что правые части системы (8) не зависят от $\psi(s)$. Приступим к изложению алгоритма построения нормальной формы.

Решения краевой задачи (1), (2) будем искать в следующем виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + v(t, s, x, \varepsilon), \tag{9}$$

где, в свою очередь,

$$\begin{gathered} v(t, s, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(t, s, x) + \varepsilon u_2(t, s, x) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, s, x) + \dots, \\ u_1(t, s, x) = z(s)\exp(i\sigma t)\exp(i\pi x) + \overline{z}(s)\exp(-i\sigma t)\exp(-i\pi x), \end{gathered} \tag{10}$$

а точками обозначены слагаемые, имеющие порядок малости $o(\varepsilon^{3/2})$. Функции $u_2(t, s, x), u_3(t, s, x)$ по переменной t имеют период $2\pi/\sigma$ и при фиксированных t, s справедливо включение

$$u_j(t, s, x) \in H_2^2, \ j = 1, 2, 3.$$

Подстановка суммы (9) с учетом равенства (10) в краевую задачу (1), (2) приводит к неоднородным краевым задачам для определения функций u_2, u_3. Ниже использованы обозначения

$$w_j(t, s, x) = u_j(t, s, x - 1), \ j = 1, 2, 3.$$

Так, приравнивая слагаемые при ε, получаем следующую неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \psi'(s) = Au_2 + b\big(u_1 - w_1\big)\frac{\partial w_1}{\partial x} + dc\Big(\frac{\partial w_1}{\partial x}\Big)^2, \tag{11}$$

$$u_2(t,s,x+2) = u_2(t,s,x). \tag{12}$$

Здесь $w_1 = u_1(t,s,x-1)$ и поэтому в силу выбора u_1 справедливо равенство $w_1(t,s,x) = -u_1(t,s,x)$, а

$$Au_2 = a_{\text{кр}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} + u_2 - w_2.$$

Наконец, приравнивая слагаемые при $\varepsilon^{3/2}$, получаем неоднородную краевую задачу для определения $u_3(t,s,x)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial s} = Au_3 + a_{\text{кр}}a_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b\big(u_1 - w_1\big)\frac{\partial w_2}{\partial x} + b\big(u_2 - w_2\big)\frac{\partial w_1}{\partial x} + \\ +2dc\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} - bd\big(u_1 - w_1\big)\big(\frac{\partial w_1}{\partial x}\big)^2.\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь, как и ранее, $Au_3 = a_{\text{кр}}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - c\dfrac{\partial w_3}{\partial x} + u_3 - w_3$. Отметим также, что $w_2(t,s,x) = u_2(t,s,x-1)$.

$$u_3(t,s,x+2) = u_3(t,s,x). \tag{14}$$

Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av + G(t,x), \tag{15}$$

$$v(t,x+2) = v(t,x), \tag{16}$$

где $G(t,x)$ – гладкая периодическая функция с периодом $2\pi/\sigma$ по t и 2-периодическая функция переменного x. Справедливо утверждение.

Лемма 2. *Неоднородная краевая задача (15), (16) имеет периодическое по t решение периода $2\pi/\sigma$, если выполнены равенства* $\int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^2 G(t,x)dxdt =$
$= \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^2 G(t,x)\exp(i\sigma t + i\pi x)dxdt = \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^2 G(t,x)\exp(-i\sigma t - i\pi x)dxdt = 0.$
Равенства $\int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^2 v(t,x)dxdt = \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^2 v(t,x)\exp(i\sigma t + i\pi x)dxdt =$
$= \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^2 v(t,x)\exp(-i\sigma t - i\pi x)dxdt = 0$ *выделяют одно подходящее решение.*

Последовательно применяя условия разрешимости к неоднородным задачам (11), (12), а также (13), (14), определяем подходящие функции $u_2(t,s,x), u_3(t,s,x)$, а также коэффициенты нормальной формы. Обратившись сначала к задаче (11), (12), находим, что из условий разрешимости вытекает равенство

$$d_0 = 2\pi^2 dc.$$

При таком выборе d_0 находим, что

$$u_2(t,s,x)=\eta z^2\exp(2i\sigma t)\exp(2i\pi x)+\overline{\eta z}^2\exp(-2i\sigma t)\exp(-2i\pi x),$$
$$\eta=\eta_1+i\eta_2,\ \eta_1=-\frac{\pi^2c(b+d)}{2(4+\pi^2c^2)},\ \eta_2=\frac{dc^2\pi^3-4\pi b}{4(4+\pi^2c^2)}.$$

Анализ краевой задачи (13), (14) приводит к равенствам

$$d_1=\frac{\pi^2}{4+\pi^2c^2}[(b-2d)(4b-\pi^2c^2d)],\ \alpha=-2a_0,$$
$$d_2=\frac{c\pi^3}{4+\pi^2c^2}[2bd+d^2c^2\pi^2-2b^2],\ \beta=0.$$

При проверке условий разрешимости для краевой задачи (13), (14) использованы равенства

$$w_2(t,s,x)=u_2(t,s,x-1)=u_2(t,s,x),$$

которые выполнены в силу выбора $u_2(t,s,x)$.

3. Анализ нормальной формы. Основной результат. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (8). Положим

$$z(s)=\rho(s)\exp(i\varphi(s)), \tag{17}$$

где $\rho(s)\geq 0,\ \varphi(s)\in R$. В новых переменных нормальная форма примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi'&=d_2\rho^2,\ \psi'=d_0\rho^2,\\ \rho'&=-2a_0\rho+d_1\rho^3.\end{aligned} \tag{18}$$

Пусть сначала $a_0=-1$, т.е. $a=a_{\text{кр}}(1+a_0\varepsilon)<a_{\text{кр}}$. Нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (2), а также последнего из уравнений системы (18) теряет устойчивость. Если вместе с тем $d_1<0$, то система (18) имеет устойчивые решения

$$\rho(s)=\rho_0,\ \psi(s)=d_0\rho_0^2s+\psi_0,\ \varphi(s)=d_2\rho_0^2s+\varphi_0, \tag{19}$$

где $\rho_0=\sqrt{-2/d_1},\ \psi_0,\varphi_0$ произвольны.

Пусть теперь $a_0=1$. В этом случае нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (2), а также последнего из уравнений системы (18) устойчиво. Система (18) при $d_1>0$ имеет решения, подобные (19),

$$\rho(s)=\rho_0,\ \psi(s)=d_0\rho_0^2s+\psi_0,\ \varphi(s)=d_2\rho_0^2s+\varphi_0,$$

но здесь $\rho_0=\sqrt{2/d_1}$ и данное решение неустойчиво.

Используя результаты работ [14–17], можно убедиться в справедливости утверждения. В работе [17] была рассмотрена аналогичная задача для уравнения Бредли–Харпера.

Теорема. *Пусть $a=a_{кр}(1-\varepsilon), d_1<0$. Существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ решению (19) нормальной формы соответствует устойчивое решение краевой задачи (1), (2)*

$$\begin{aligned}u(t,x,\varepsilon)&=-\Big(\frac{2d_0\varepsilon}{d_1}+o(\varepsilon)\Big)t+v(t,x,\varepsilon),\\ v(t,x,\varepsilon)&=\varepsilon^{1/2}\sqrt{-2/d_1}(\exp(i\pi x+i\sigma_\varepsilon t)+\exp(-i\pi x-i\sigma_\varepsilon t))+\\ &+\varepsilon\Big(-\frac{2}{d_1}\Big)(\eta\exp(2i\pi x+2i\sigma_\varepsilon t)+\overline{\eta}\exp(-2i\pi x-2i\sigma_\varepsilon t))+o(\varepsilon),\end{aligned} \tag{20}$$

где $\sigma_\varepsilon = \pi c - 2\dfrac{\varepsilon d_2}{d_1}$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, *постоянные* η_1, η_2, d_1, d_2 *были определены ранее в п. 2.*

В случае, когда $a = a_{кр}(1+\varepsilon)$, $d_1 > 0$ *краевая задача (1), (2) имеет неустойчивое решение, для которого справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{gathered} u(t,x,\varepsilon) = \big(\frac{2d_0\varepsilon}{d_1} + o(\varepsilon)\big)t + v(t,x,\varepsilon), \\ v(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{2/d_1}(\exp(i\pi x + i\sigma_\varepsilon t) + \exp(-i\pi x - i\sigma_\varepsilon t)) + \\ +\varepsilon\big(\frac{2}{d_1}\big)(\eta\exp(2i\pi x + 2i\sigma_\varepsilon t) + \overline{\eta}\exp(-2i\pi x - 2i\sigma_\varepsilon t)) + o(\varepsilon). \end{gathered} \tag{21}$$

Указанные асимптотики имеют место при $t \in [0, T(\varepsilon)]$, *где* $T(\varepsilon) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Формулы (20),(21) задают пространственно неоднородный рельеф, имеющий волновой характер (волновые наноструктуры). При этом физически реализуемы лишь устойчивые решения (20). Соответствующая формула выписана с точностью до произвольных постоянных φ_0, ψ_0. Так что на самом деле мы имеем дело с двухпараметрическим семейством пространственно неоднородных решений.

Как уже отмечалось ранее, центральную роль здесь играет знак d_1. Пусть $\xi = b/d$. Тогда знак d_1 совпадает со знаком величины

$$p_2(\xi) = (\xi - 2)(\xi - \frac{\pi^2 c^2}{4}),$$

знак которой анализируется достаточно просто. Если $\dfrac{\pi^2 c^2}{4} > 2$, то нужный знак ($d_1 < 0$) имеет место при $\xi \in (2, \dfrac{\pi^2 c^2}{4})$. Если же оказалось, что $\dfrac{\pi^2 c^2}{4} < 2$, то $d_1 < 0$ при $\xi \in (\dfrac{\pi^2 c^2}{4}, 2)$.

Из приведенных выше результатов вытекает, что формирование волнового рельефа возможно при потере устойчивости однородного состояния равновесия. Это происходит при уменьшении a. Аналогичный сценарий формирования неоднородного рельефа реализуется и при рассмотрении уравнения Бредли–Харпера. Здесь, правда, следует заметить, что область применимости уравнения Бредли–Харпера и нелокального уравнения эрозии различна. Второе уравнение получено для более «мелкомасштабных» возмущений.

Список литературы

1. *Рудый А.С., Бачурин В.И.* Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72, №5. С. 624–629.

2. *Birkgan S.E., Bachurin V.I., Rudy A.S., Smirnov V.K.* Nanoscale model of surface erosion by ion bombardment // Eff. & Def. in Sol. 2004. V. 159, №6. P. 319–329.

3. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.* Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении поверхности ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. 2011. Т. 40, №2. С. 109–118.

4. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // J. Mater. Sci. 1973. V. 8. P. 1545–1553.

5. *Bradley R.M., Harper J.M.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. 1988. V. A6. P. 2390–2395.

6. *Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н.* Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. 1, №2. С. 151–158.

7. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950. 256 с.

8. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

9. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи абстрактных квазилинейных уравнений второго порядка и их приложений // Труды Московского математического общества. 1970. Т. 23. С. 37–60.

10. *Segal J.* Nonlinear Semigroups // Ann of Math. 1963. V. 78. P. 339–364.

11. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Московского математического общества. 1961. Т. 10. С. 297–350.

12. *Куликов А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль. 1976. С. 114–129.

13. *Marsden Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркации рождения цикла и ее приложения. М.: Наука, 1980. 368 с.

14. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 430 с.

15. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. Ярославль: Изд-во Ярославского гос. ун-та, 2003. 107 с.

16. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 40, №9. С. 1290–1299.

17. *Куликов А.Н., Куликов Д.А., Рудый А.С.* Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского ун-та. 2011. В. 4. С. 86–99.

Formation of a Warped Nanomodular Surface Under Ion Bombardment. A Nanoscale Model of Surface Erosion

Kulikov D.A., Rudy A.S.

Keywords: bifurcation, stability, ripple structures, space-nonhomogeneous solutions

A nanoscale model of surface erosion, simulating the process of surface shaping under ion bombardment is considered. The possibility of a ripple topography is demonstrated by means of bifurcations theory methods for dynamical systems with an infinite dimensional space of initial data. In particular, we use the normal form of Poincare–Dulak.

Сведения об авторах:
Куликов Дмитрий Анатольевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доцент кафедры дифференциальных уравнений.
Рудый Александр Степанович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
профессор, заведующий кафедрой микроэлектроники.